Tema 4: Movimiento relativo

FÍSICA XERAL I

GRAO EN FÍSICA

1. Introducción.

- Movimiento absoluto y movimiento relativo

La descripción de un movimiento se hace siempre respecto de un sistema de referencia.

Si el sistema de referencia está en reposo se dice que es un ***sistema inercial primario*** y al movimiento respecto a él se le denomina ***absoluto***.

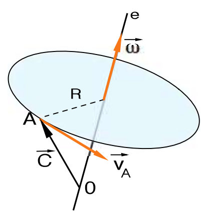
Cuando el sistema de referencia que se está considerando se mueve en el espacio, a todo movimiento referido a él se le denomina ***relativo***.

Se denomina ***movimiento de arrastre*** al que tendría una partícula que está fija respecto a un sistema de ejes móviles, por el hecho de que éstos se muevan respecto a un sistema de referencia fijo.

Cuando el tiempo medido por dos observadores es el mismo con independencia de que el sistema de referencia se mueva o esté fijo diremos que se trata de un problema de ***relatividad clásica***, mientras que si depende de si el sistema es fijo o es móvil diremos que es un problema de ***relatividad restringida***.

- Ecuaciones de Poisson

Sea $\vec{C}$ un vector de módulo constante que rota alrededor de un eje como se indica en la figura.



El origen de $\vec{C}$ se encuentra en O sobre el eje de rotación mientras que el extremo A, al ser $|\vec{C}| = cte$, describe una circunferencia de radio R alrededor de dicho eje.

La velocidad del punto A respecto a O será

$$\vec{v}_A = \frac{d\vec{C}}{dt}$$

pero al estar A describiendo un movimiento circular $\vec{v}_A = \vec{\omega} \wedge \vec{C}$, y por lo tanto

$$\frac{d\vec{C}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{C} \tag{1}$$

Si aplicamos la expresión (1) a los elementos de una base vectorial con origen en O y que rota en torno al eje con una velocidad $\vec{\omega}$, resulta

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{i}, \quad \frac{d\vec{j}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{j}, \quad \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{k} \tag{2}$$

que son las denominadas ***ecuaciones de Poisson***.

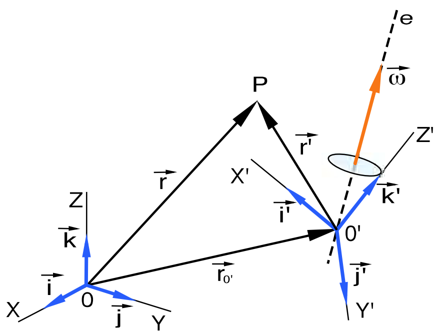
2. Ejes de referencia en rotación-traslación.

A lo largo del desarrollo que vamos a llevar a cabo, utilizaremos la siguiente notación:

Representaremos por X,Y,Z a los ejes de un sistema de referencia fijo con origen en O, cuya base vectorial estará constituida por los vectores unitarios $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Análogamente, los ejes X',Y',Z' hacen referencia a un sistema de coordenadas móvil con origen en el punto O', siendo $\vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'}$ su correspondiente base vectorial.

Supondremos que el sistema de referencia móvil se está trasladando respecto al sistema fijo, al mismo tiempo que posee un movimiento de rotación alrededor de un eje que pasa por O' con una velocidad angular $\vec{\omega}$.



Sean $\vec{r}$ el vector de posición de un punto P respecto al sistema fijo, $\vec{r'}$ el vector de posición del mismo punto P referido al sistema móvil y $\vec{r}_{o'}$ el vector de posición del origen móvil O' respecto a O.

De acuerdo con esto (x, y, z) y $(x_{o'}, y_{o'}, z_{o'})$ serán las coordenadas de los puntos P y O', respectivamente, referidas al sistema fijo; de manera análoga (x', y', z') serán las coordenadas de P referidas al sistema móvil. De la figura podemos ver que

$$\vec{r} = \vec{r}_{o'} + \vec{r}\,' \tag{3}$$

donde cada uno de los vectores de posición se expresa en función de sus componentes por

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \tag{4a}$$

$$\vec{r}_{o'} = x_{o'}\vec{i} + y_{o'}\vec{j} + z_{o'}\vec{k} \tag{4b}$$

$$\vec{r'} = x'\vec{i'} + y'\vec{j'} + z'\vec{k'} \tag{4c}$$

Si derivamos respecto al tiempo la ecuación (3), nos quedará

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_o}{dt} + \frac{d\vec{r'}}{dt} \tag{5}$$

donde el término

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} \tag{6}$$

representa la velocidad absoluta del punto P pues corresponde a la derivada temporal del vector de posición respecto al sistema de referencia fijo.

Análogamente

$$\vec{v}_{o'} = \frac{d\vec{r}_{o'}}{dt} = \dot{x}_{o'}\vec{i} + \dot{y}_{o'}\vec{j} + \dot{z}_{o'}\vec{k} \tag{7}$$

representa la velocidad absoluta del origen de coordenadas móvil O' referido al sistema de coordenadas fijo.

Por último, el término

$$\frac{d\vec{r'}}{dt} = (\dot{x}'\vec{i'} + \dot{y}'\vec{j'} + \dot{z}'\vec{k'}) + \left(x'\frac{d\vec{i'}}{dt} + y'\frac{d\vec{j'}}{dt} + z'\frac{d\vec{k'}}{dt}\right) \tag{8}$$

en donde hemos tenido en cuenta que tanto las coordenadas (x',y',z') como la orientación de la base $(\vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'})$ varían con el tiempo.

El vector

$$\vec{v'} = \dot{x}'\vec{i'} + \dot{y}'\vec{j'} + \dot{z}'\vec{k'} \tag{9}$$

se denomina ***velocidad relativa*** pues representa la velocidad del punto P referida al sistema móvil supuesto éste fijo.

Si tenemos en cuenta las ecuaciones de Poisson, el segundo sumando de la ecuación (8) resulta ser

$$\begin{aligned} x'\frac{d\vec{i'}}{dt} + y'\frac{d\vec{j'}}{dt} + z'\frac{d\vec{k'}}{dt} &= x'(\vec{\omega}\wedge\vec{i'}) + y'(\vec{\omega}\wedge\vec{j'}) + z'(\vec{\omega}\wedge\vec{k'}) \\ &= \vec{\omega}\wedge(x'\vec{i'} + y'\vec{j'} + z'\vec{k'}) \\ &= \vec{\omega}\wedge\vec{r'} \qquad (10) \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\frac{d\vec{r'}}{dt} = \vec{v'} + \vec{\omega}\wedge\vec{r'} \qquad (11)$$

Sustituyendo las expresiones (6), (7), y (11) en la ecuación (5) llegamos a

$$\vec{v} = \vec{v}_{o'} + \vec{v'} + \vec{\omega}\wedge\vec{r'} \qquad (12)$$

Si consideramos al punto P fijo en el sistema móvil, es decir (x',y',z') constantes, entonces la velocidad relativa $\vec{v'} = 0$, y el movimiento de P se deberá exclusivamente al movimiento del sistema de referencia móvil.

Entonces, la ecuación (12) adopta la forma

$$\vec{v}_a = \vec{v}_{o'} + \vec{\omega}\wedge\vec{r'} \qquad (13)$$

donde $\vec{v}_a$ es la ***velocidad de arrastre***.
En consecuencia la expresión (12) se escribirá finalmente

$$\vec{v} = \vec{v'} + \vec{v}_a \qquad (14)$$

expresión que representa la ***ley de composición de velocidades***: *la velocidad absoluta de una partícula es igual a la suma de la velocidad relativa más la velocidad de arrastre*

Para calcular ahora la aceleración debemos derivar respecto al tiempo la expresión (12)

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}_{o'}}{dt} + \frac{d\vec{v'}}{dt} + \frac{d(\vec{\omega}\wedge\vec{r'})}{dt} \qquad (15)$$

A continuación analizaremos cada uno de los términos que aparecen en la ecuación anterior.

El vector

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k} \tag{16}$$

representa la aceleración absoluta del punto P.

Análogamente

$$\vec{a}_{o'} = \frac{d\vec{v}_{o'}}{dt} = \ddot{x}_{o'}\vec{i} + \ddot{y}_{o'}\vec{j} + \ddot{z}_{o'}\vec{k} \tag{17}$$

representa la aceleración absoluta del origen móvil O'.

Si tenemos en cuenta la expresión (9), el siguiente término será

$$\frac{d\vec{v'}}{dt} = (\ddot{x}'\vec{i'} + \ddot{y}'\vec{j'} + \ddot{z}'\vec{k'}) + \left(\dot{x}'\frac{d\vec{i'}}{dt} + \dot{y}'\frac{d\vec{j'}}{dt} + \dot{z}'\frac{d\vec{k'}}{dt}\right) \tag{18}$$

en donde el término

$$\vec{a'} = \ddot{x}'\vec{i'} + \ddot{y}'\vec{j'} + \ddot{z}'\vec{k'} \tag{19}$$

representa la aceleración relativa, mientras que

$$\begin{aligned}\dot{x}'\frac{d\vec{i'}}{dt} + \dot{y}'\frac{d\vec{j'}}{dt} + \dot{z}'\frac{d\vec{k'}}{dt} &= \dot{x}'(\vec{\omega}\wedge\vec{i'}) + \dot{y}'(\vec{\omega}\wedge\vec{j'}) + \dot{z}'(\vec{\omega}\wedge\vec{k'}) \\ &= \vec{\omega}\wedge(\dot{x}'\vec{i'} + \dot{y}'\vec{j'} + \dot{z}'\vec{k'}) \\ &= \vec{\omega}\wedge\vec{v'} \end{aligned} \tag{20}$$

Resulta entonces que

$$\frac{d\vec{v'}}{dt} = \vec{a'} + \vec{\omega}\wedge\vec{v'} \tag{21}$$

Analicemos ahora el último término de la ecuación (15)

$$\frac{d(\vec{\omega}\wedge\vec{r'})}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\vec{r'} + \vec{\omega}\wedge\frac{d\vec{r'}}{dt} \tag{22}$$

donde

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\vec{r'} = \dot{\vec{\omega}}\wedge\vec{r'} = \vec{\alpha}\wedge\vec{r'} \tag{23}$$

y teniendo en cuenta la expresión (11)

$$\vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{r'}}{dt} = \vec{\omega} \wedge (\vec{v'} + \vec{\omega} \wedge \vec{r'})$$
$$= \vec{\omega} \wedge \vec{v'} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r'}) \quad (24)$$

por lo tanto

$$\frac{d(\vec{\omega} \wedge \vec{r'})}{dt} = \vec{\alpha} \wedge \vec{r'} + \vec{\omega} \wedge \vec{v'} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r'}) \quad (25)$$

Si llevamos a la ecuación (15) los resultados dados por (16), (17), (21) y (25) , resulta

$$\vec{a} = \vec{a}_{o'} + \vec{a'} + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v'} + \vec{\alpha} \wedge \vec{r'} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r'}) \quad (26)$$

Imponiendo en la ecuación anterior la condición de que (x',y',z') son constantes, obtenemos la ***aceleración de arrastre***

$$\vec{a}_a = \vec{a}_{o'} + \vec{\alpha} \wedge \vec{r'} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r'}) \quad (27)$$

con lo que la aceleración absoluta resulta ser

$$\vec{a} = \vec{a'} + \vec{a}_a + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v'} \quad (28)$$

Al término

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v'} \quad (29)$$

se le denomina ***aceleración complementaria*** o ***aceleración de Coriolis***. Esta aceleración será nula cuando no exista rotación, $\vec{\omega} = 0$, cuando no haya movimiento relativo, $\vec{v'} = 0$, o cuando existiendo ambas, éstas sean paralelas $\vec{\omega} \wedge \vec{v'} = 0$.

Resulta finalmente que

$$\vec{a} = \vec{a'} + \vec{a}_a + \vec{a}_c \quad (30)$$

expresión que representa la ***ley de composición de aceleraciones***: *la aceleración absoluta es igual a la suma de la aceleración relativa más la aceleración de arrastre más la aceleración complementaria.*

3. Ejes de referencia en traslación.

Si el sistema móvil solamente se traslada, entonces $\vec{\omega} = 0$ y la base $(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ se mantendrá paralela a si misma.

En este caso, las expresiones (14) y (30) se reducen a

$$\vec{v} = \vec{v}_{o'} + \vec{v}' \tag{31}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_{o'} + \vec{a}' \tag{32}$$

Para estudiar este tipo de movimientos lo más adecuado es tomar el sistema de referencia fijo y el móvil paralelos entre sí, de forma que $\vec{i} = \vec{i}', \vec{j} = \vec{j}', \vec{k} = \vec{k}'$.

Ejemplo 1

Un avión debe volar hacia el norte. La velocidad del avión respecto al aire es de 200 km/h y el viento sopla de oeste a este a 90 km/h. Calcular cuál debe ser el rumbo del avión y qué velocidad debe llevar el avión respecto al suelo.

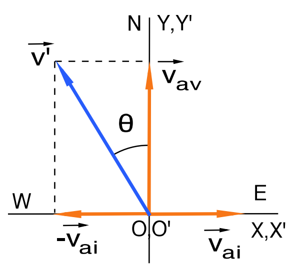
Situemos los sistemas de referencia como se indica en la figura.

velocidad absoluta del avión:

$$\vec{v} = \vec{v}_{av} = v_{av}\vec{j}$$

velocidad absoluta del aire:

$$\vec{v}_{o'} = \vec{v}_{ai} = v_{ai}\vec{i}$$



Según la ecuación (31) la *velocidad relativa del avión respecto al aire* es

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_{o'} = \vec{v}_{av} + (-\vec{v}_{ai})$$

Ahora bien, como $v_{ai} = 90\ km/h,\ v' = 200\ km/h$, resulta

$$v_{ai} = v' \operatorname{sen}\theta \ \Rightarrow\ \operatorname{sen}\theta = \frac{v_{ai}}{v'} = \frac{90}{200} \ \Rightarrow\ \theta = 26,7^{o}$$

$$v_{av} = v' \cos\theta = 200 \cos 26,7 = 178,7\ km/h$$

- Movimiento de traslación rectilíneo uniforme

Si el sistema móvil posee un movimiento de traslación rectilíneo uniforme, $\vec{v}_{o'} = cte$ y por lo tanto $\vec{a}_{o'} = 0$. La ecuación (32) se reduce a

$$\vec{a} = \vec{a'} \tag{33}$$

La aceleración de una partícula es la misma en todos los sistemas de referencia con movimiento de traslación uniforme, enunciado que se conoce como ***principio de la relatividad de Galileo***.

Este principio fue generalizado por Einstein postulando que *todas las leyes de la naturaleza son las mismas para todos los observadores en movimiento relativo de traslación uniforme*.

4. Ejes de referencia en rotación.

Para esta situación particular, tanto la velocidad como la aceleración de traslación de O' son nulas: $\vec{v}_{o'} = 0, \ \vec{a}_{o'} = 0$

Por lo tanto, las correspondientes ecuaciones de arrastre (13) y (27) se verán modificadas

$$\vec{v}_a = \vec{\omega} \wedge \vec{r'} \tag{34}$$

$$\vec{a}_a = \vec{\alpha} \wedge \vec{r'} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r'}) \tag{35}$$

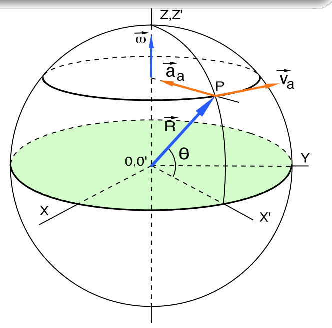
Ejemplo 2

Evaluar la velocidad y aceleración a la que está sometida una persona inmóvil sobre la superficie de la Tierra en un punto de latitud norte 40°. Radio de la Tierra 6375 km.

Situemos los sistemas de referencia como se indica en la figura: origen común y coincidiendo los ejes Z y Z'.

El sistema móvil está rotando en torno al eje Z' con una velocidad angular $\vec{\omega} = \omega \vec{k'}$.

El vector de posición del punto P será $\vec{R} = R(\cos\theta \vec{i'} + \operatorname{sen}\theta \vec{k'})$



Como la persona está inmóvil en el punto P, la distancia O'P será constante y por consiguiente $\vec{v'} = \vec{a'} = 0$ así como la aceleración de Coriolis $\vec{a}_c = 0$.

En consecuencia, la velocidad absoluta coincide con la de arrastre

$$\vec{v} = \vec{v}_a = \vec{\omega} \wedge \vec{R} = R\omega \cos\theta \vec{j'}$$

y está por tanto dirigida según la tangente al paralelo que pasa por P.

La aceleración absoluta coincide también con la de arrastre

$$\vec{a} = \vec{a}_a = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{R}) = \omega \vec{k'} \wedge R\omega \cos\theta \vec{j'} = -R\omega^2 \cos\theta \vec{i'}$$

poniendo de manifiesto que la aceleración está dirigida hacia el eje de rotación y es normal a él.

Dado que la Tierra tarda 24 horas en girar sobre su eje, la velocidad de rotación vendrá dada por

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600} = 7,27 \cdot 10^{-5} \ rad/s$$

y para una latitud $\theta = 40^o$, resulta

$$\vec{v} = 6375 \cdot 10^3 \cdot 7,27 \cdot 10^{-5} \cdot \cos 40 \ \vec{j'} = 355 \ \vec{j'} \ m/s$$

$$\vec{a} = -6375 \cdot 10^3 \cdot (7,27 \cdot 10^{-5})^2 \cdot \cos 40 \ \vec{i'} = -0,026 \ \vec{i'} \ m/s^2$$
